

第2讲 方程（组）与不等式（组）综合

一、已知解方程解的范围求参数范围

例题1

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x - y = 1 \end{cases}$ 中 x, y 非负，求 k 的取值范围。

解：

【教法备注】

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x - y = 1 \end{cases}$ 中 x, y 非负，求 k 的取值范围。

解：①+② 得 $3x = k + 1$

$$\text{解得 } x = \frac{k+1}{3}$$

将 $x = \frac{k+1}{3}$ 代入②得 $y = \frac{k-2}{3}$

$$\therefore \text{不等式组的解为 } \begin{cases} x = \frac{k+1}{3} \\ y = \frac{k-2}{3} \end{cases}$$

$\because x, y$ 是非负数，所以 $x \geq 0, y \geq 0$ 即 $\frac{k+1}{3} \geq 0, \frac{k-2}{3} \geq 0$

解得 $k \geq -1$ 且 $k \geq 2$

$\therefore k$ 的取值范围是 $k \geq 2$

总结：这种类型题核心在于“解方程”“解方程组”，只要学生能够将方程用参数表示出，后面结合题目具体给出的限定条件，即可求出参数的范围。

练习1

1.

若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = -3m + 2 \end{cases}$ 的解满足 $x - y > -\frac{3}{2}$ ，则 m 的最小整数解为（ ）。

A. -3

B. -2

C. -1

D. 0

【答案】C

【解析】 $\begin{cases} 2x + y = 4 \text{①} \\ x + 2y = -3m + 2 \text{②} \end{cases}$

①-②得： $x - y = 3m + 2$ ，

$\therefore$ 关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = -3m + 2 \end{cases}$ 的解满足 $x - y > -\frac{3}{2}$ ，

$\therefore 3m + 2 > -\frac{3}{2}$ ，

解得 $m > -\frac{7}{6}$ ，

$\therefore m$ 的最小整数解为-1，

故选C。

【标注】【知识点】已知方程组解的关系，求参数范围

2. 如果方程组 $\begin{cases} x - y = a + 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ 的解 x 、 y 满足 $x > 0$ ， $y < 0$ ，求 a 的取值范围。

【答案】 $a > -\frac{1}{2}$ 。

【解析】 $\begin{cases} x - y = a + 3 \text{①} \\ 2x + y = 5 \text{②} \end{cases}$ ，

由①+②得： $3x = a + 8$ ，

$x = \frac{a + 8}{3}$ ，

将 $x = \frac{a + 8}{3}$ 代入①得：

$\frac{a + 8}{3} - y = a + 3$ ，

$-y = a + 3 - \frac{a + 8}{3}$ ，

$-y = \frac{3a + 9 - a - 8}{3}$ ，

$-y = \frac{2a + 1}{3}$ ，

$y = -\frac{2a + 1}{3}$ ，

$\therefore x > 0$ ， $y < 0$ ，

$\begin{cases} \frac{a + 8}{3} > 0 \text{③} \\ -\frac{2a + 1}{3} < 0 \text{④} \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} \frac{a + 8}{3} > 0 \text{③} \\ -\frac{2a + 1}{3} < 0 \text{④} \end{cases}$ ，

由③，去分母得： $a + 8 > 0$ ，

移项得： $a > -8$ ，

由④，去分母得： $2a + 1 > 0$ ，

移项得： $2a > -1$ ，

系数化为1得： $a > -\frac{1}{2}$ ，

综上： a 的取值范围是 $a > -\frac{1}{2}$ 。

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

3. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x - y = 2a - 5 \\ x + 2y = 3a + 3 \end{cases}$ 的解都为正数。

(1) 求 a 的取值范围。

(2) 已知 $a + b = 4$ ，且 $b > 0$ ， $z = 2a - 3b$ ，求 z 的取值范围。

【答案】(1) $a > 1$ 。

(2) $-7 < z < 8$ 。

【解析】(1) $\begin{cases} 3x - y = 2a - 5 \text{ ①} \\ x + 2y = 3a + 3 \text{ ②} \end{cases}$

① $\times 2$ +②得： $x = a - 1$ ，

② $\times 3$ -①得： $y = a + 2$ ，

$\because$ 原方程组的解均为正数，

$$\therefore \begin{cases} a - 1 > 0 \\ a + 2 > 0 \end{cases}$$

$\therefore a > 1$ 。

(2) $a + b = 4$ ， $b > 0$ ，

$\therefore b = 4 - a > 0$ ，

$\therefore 1 < a < 4$ ，

$\therefore z = 2a - 3b$ ，

$\therefore z = 5a - 12$ ，

$\therefore 1 < a < 4$ ，

$\therefore -7 < z < 8$ 。

【标注】【知识点】已知方程（组）解的范围，求参数范围

二、 已知参数范围求方程组解的范围

例题2

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x - y = 1 \end{cases}$ 中 $-1 < k \leq 4$, 求 x, y 的取值范围.

解:

【教法备注】

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x - y = 1 \end{cases}$ 中 $-1 < k \leq 4$, 求 x, y 的取值范围.

解: ①+② 得 $3x = k + 1$

$$\text{解得: } x = \frac{k+1}{3}$$

将 $x = \frac{k+1}{3}$ 代入②得 $y = \frac{k-2}{3}$

$$\therefore \text{不等式组的解为} \begin{cases} x = \frac{k+1}{3} \\ y = \frac{k-2}{3} \end{cases} \text{变形得} \begin{cases} k = 3x - 1 \\ k = 3y + 2 \end{cases}$$

$$\therefore -1 < k \leq 4, \therefore \text{即} \begin{cases} -1 < 3x - 1 \leq 4 \\ -1 < 3y + 2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{解得: } 0 < x \leq \frac{5}{3}, -1 < y \leq \frac{2}{3}$$

总结: 这种类型题核心在于“解方程”“解方程组”, 根据方程的解, 利用等式的性质分别表示出参数的与未知数的等量关系, 再根据参数的范围求出未知数的范围。

练习2

4. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x - 2y = 5 - a \\ x + y = 2a + 8 \end{cases}$, 其中 $-7 \leq a \leq 2$, 给出下列说法: ①当 $a = 1$ 时, 方程组的解也是 $x + y = 1 - a$ 方程的解; ②当 x, y 的值互为相反数时, $a = 4$; ③ $-12 \leq x + 2y \leq 15$; ④ $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ 可能是原方程组的解. 其中正确的说法有 ().
- A. ①③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③

【答案】A

【解析】 ①当 $a = 1$ 时, 方程组为 $\begin{cases} x - 2y = 4 \text{ ①} \\ x + y = 10 \text{ ②} \end{cases}$, 由②-①得 $3y = 6$, 即 $y = 2$, 将 $y = 2$ 代入①中得 $x - 4 = 4$, 即 $x = 8$, 将 $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入 $x + y = 11 - a$ 中, $8 + 2 = 11 - 1$, 因此①正确;

② $\begin{cases} x - 2y = 5 - a \text{ ①} \\ x + y = 2a + 8 \text{ ②} \end{cases}$, 由②-①得 $3y = 3a + 3$, 得 $y = a + 1$, 将 $y = a + 1$ 代入①中得 $x - 2(a + 1) = 5 - a$, 得 $x = a + 7$, 当 x 、 y 互为相反数时, $a + 7 + a + 1 = 0$, $\therefore a = -4$, 故②错误;

③由②可知 $x = a + 7$, $y = a + 1$, 因此 $x + 2y = a + 7 + 2(a + 1) = 3a + 9$, $\therefore -7 \leq a \leq 2$, $\therefore -12 \leq 3a + 9 \leq 15$, 故③正确;

④由②可知 $x = a + 7$, $y = a + 1$, 当 $x = a + 1 = 5$ 时, $a = 4$, 此时 $y = a + 1 = -1$, $a = -2$, 故④错误;

故选A.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

5. 若二元一次方程组 $\begin{cases} 6x + y = k + 3 \\ x + 6y = 5 \end{cases}$ 的解为 x, y , 且 $2 < k < 4$, 令 $m = x - y$, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $-\frac{2}{5} < m < 0$ B. $0 < m < \frac{2}{5}$ C. $0 < m < \frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2} < m < 0$

【答案】 B

【解析】 $\begin{cases} 6x + y = k + 3 \text{ ①} \\ x + 6y = 5 \text{ ②} \end{cases}$,

$$\text{①}-\text{②得: } 5x - 5y = k - 2,$$

$$x - y = \frac{k - 2}{5},$$

$$\therefore 2 < k < 4,$$

$$\therefore 0 < k - 2 < 2,$$

$$\therefore 0 < \frac{k - 2}{5} < \frac{2}{5},$$

$$\therefore 0 < x - y < \frac{2}{5}.$$

故选B.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

6. 已知实数 x, y, a 满足 $x + 3y + a = 4$, $x - y - 3a = 0$, 若 $-1 \leq a \leq 1$, 则 $2x + y$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $0 \leq 2x + y \leq 6$

【解析】 $\begin{cases} x + 3y + a = 4 \\ x - y - 3a = 0 \end{cases}$ 联立方程组解得 $\begin{cases} x = 1 + 2a \\ y = 1 - a \end{cases}$,

$$\therefore 2x + y = 2(1 + 2a) + 1 - a = 3a + 3,$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1,$$

$$\therefore 0 \leq 3a + 3 \leq 6,$$

$$\therefore 0 \leq 2x + y \leq 6.$$

【标注】 【知识点】 二元一次方程组解的情况

7. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = 1 - 3a \\ 2x - 3y = a + 5 \end{cases}$, 其中 $-2 \leq a < 3$.

(1) 求 $2x - y$ 的取值范围.

(2) 若 $y > 0$, 求 $x + 2y$ 的取值范围.

【答案】 (1) $0 < 2x - y \leq 5$.

(2) $2 < x + 2y \leq 5$.

【解析】 (1) $\begin{cases} 2x + y = 1 - 3a & \text{①} \\ 2x - 3y = a + 5 & \text{②} \end{cases}$,

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得: } 4x - 2y = 6 - 2a,$$

$$\therefore 2x - y = 3 - a,$$

$$\therefore -2 \leq a < 3,$$

$$\therefore -3 < -a \leq 2 \text{ 即 } 0 < 3 - a \leq 5,$$

$$\therefore 0 < 2x - y \leq 5.$$

(2) 由 (1) 知 $2x - y = 3 - a$,

$$\text{联立} \begin{cases} 2x - y = 3 - a \\ 2x + y = 1 - 3a \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 - a \\ y = -a - 1 \end{cases}.$$

$$\therefore y > 0 \text{ 即 } -a - 1 > 0,$$

$$\therefore a < -1.$$

$$\text{又} \therefore -2 \leq a < 3,$$

$$\therefore -2 \leq a < -1,$$

$$x + 2y = 1 - a + 2(-a - 1) = -3a - 1,$$

$$\therefore 3 < -3a \leq 6,$$

$$\therefore 2 < -3a - 1 \leq 5,$$

$$\therefore 2 < x + 2y \leq 5.$$

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

三、不定方程求解的范围

例题3

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x - y = 1 \end{cases}$ 中 x, y, k 非负, 求 $3x + 2y - k$ 的取值范围

解:

【教法备注】

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x - y = 1 \end{cases}$ 中 x, y, k 非负, 求 $3x + 2y - k$ 的取值范围

解: ①+② 得: $x = \frac{k+1}{3}$

将 $x = \frac{k+1}{3}$ 代入②得 $y = \frac{k-2}{3}$

$\therefore$ 不等式组的解为 $\begin{cases} x = \frac{k+1}{3} \\ y = \frac{k-2}{3} \end{cases}$

$\because x, y, k$ 是非负数, $\therefore x \geq 0, y \geq 0$ 即 $\frac{k+1}{3} \geq 0, \frac{k-2}{3} \geq 0$

解得: $k \geq -1, k \geq 2, k \geq 0$

$\therefore k$ 的取值范围是 $k \geq 2$

$$3x + 2y - k = 3 \times \frac{k+1}{3} - 2 \times \frac{k-2}{3} - k = \frac{-2k+7}{3}$$

$\therefore k \geq 2,$

$\therefore 3x + 2y - k \leq 1$

总结: 本题关键是将 k 看作为数字, 将 x, y 解出, 此时我们会得到三个含 k 的结果: 一个是 k 本身, 一个是用含 k 的代数式表示 x , 一个是用含 k 的代数式表示 y , 三个式子都要结合题干列出不等式, 再确定 k 的

取值范围。

练习3

8. 已知实数 a, b, c 满足 $\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$, 且 $b \geq c \geq 0$, 则 a 的最大值为 _____; 最小值为 _____.

【答案】 $3; \frac{3}{2}$

【解析】 由题可知 $\begin{cases} b = \frac{a+3}{2} \\ c = \frac{9-3a}{2} \end{cases}$,
 $\because b \geq c \geq 0$,
即 $\frac{a+3}{2} \geq \frac{9-3a}{2} \geq 0$,
解得 $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$,
故最大值为 3 , 最小值为 $\frac{3}{2}$.

【标注】 【知识点】 不等式的性质

9. 已知三个非负数 a, b, c 满足 $3a + 2b + c = 5$ 和 $2a + b - 3c = 1$, 若 $m = 3a + b - 7c$, 求 m 的最大值和最小值.

【答案】 m 的最大值为 $-\frac{1}{11}$, 最小值为 $-\frac{5}{7}$.

【解析】 $\because \begin{cases} 3a + 2b + c = 5 \\ 2a + b - 3c = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} 3a + 2b = 5 - c \\ 2a + b = 1 + 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7c - 3 \\ b = 7 - 11c \end{cases}$.
则 $m = 3c - 2$, 由 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, 得 $\begin{cases} 7c - 3 \geq 0 \\ 7 - 11c \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$ 解得 $\frac{3}{7} \leq c \leq \frac{7}{11}$.
 $\therefore m$ 的最大值为 $-\frac{1}{11}$, 最小值为 $-\frac{5}{7}$.

【标注】 【知识点】 由不等式(组)的解集求参数的范围

10. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - y = 3k - 2 \\ 2x + y = 1 - k \end{cases}$ (k 为常数).
- (1) 若 $|k| \leq 1$, 设 $m = 2y - 3x$ 且 m 为非负整数, 求 m 的值.

【答案】 (1) 0或1或2或3或4.

【解析】 (1)

$$m = 2y - 3x = 2 \times \frac{3-4k}{2} - 3 \times \frac{2k-1}{4} = \frac{15-22k}{4},$$

$$\text{所以 } k = \frac{15-4m}{22},$$

$$\text{因为 } |k| \leq 1,$$

$$\text{所以 } \left| \frac{15-4m}{22} \right| \leq 1,$$

$$\text{解得 } -\frac{7}{4} \leq m \leq 4,$$

由于 m 为非负整数, 所以 $m \geq 0$,

所以 m 的值为 0 或 1 或 2 或 3 或 4.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况